Simultaneidade e Variáveis Instrumentais

Econometria

Alexandre Gori Maia

Ementa:

- Equações Simultâneas – Conceito e Definição;
- Variáveis Instrumentais;

Bibliografia Básica:

- Maia, Alexandre Gori (2017). *Econometria: conceitos e aplicações*. Cap. 14.

Modelo Clássico de Regressão Linear

Modelo Clássico de Regressão Linear

1) Relação Linear entre *X* e *Y*:

O ajuste só é válido para relações lineares.

2) Os valores de *X* são fixos em repetidas amostras, não aleatórios:

Quem varia é o regressando, o regressor é fixo e dado, qualquer que seja a amostra. Fazemos a pressuposição que dado um valor de *X*, *Y* irá variar segundo uma distribuição de probabilidade com valor esperado dado por $E(Y|X_i)$.

3) Esperança condicional dos erros igual a zero, ou seja, $E(e|X_i)=0$:

É a mesma coisa afirmar que $E(Y|\mathbf{x}_i)=\mathbf{x}_i'\beta$

4) A variabilidade dos erros é constante, ou seja, $E(e_i^2)=\sigma^2$

Os erros são homocedásticos, ou seja, sua variância é a mesma para qualquer *X*.

5) Os erros são não autocorrelacionados, ou seja, $E(e_i e_j)=0$:

Não há relação entre valores ordenados dos erros segundo tempo ou espaço.

6) Os erros apresentam distribuição normal:

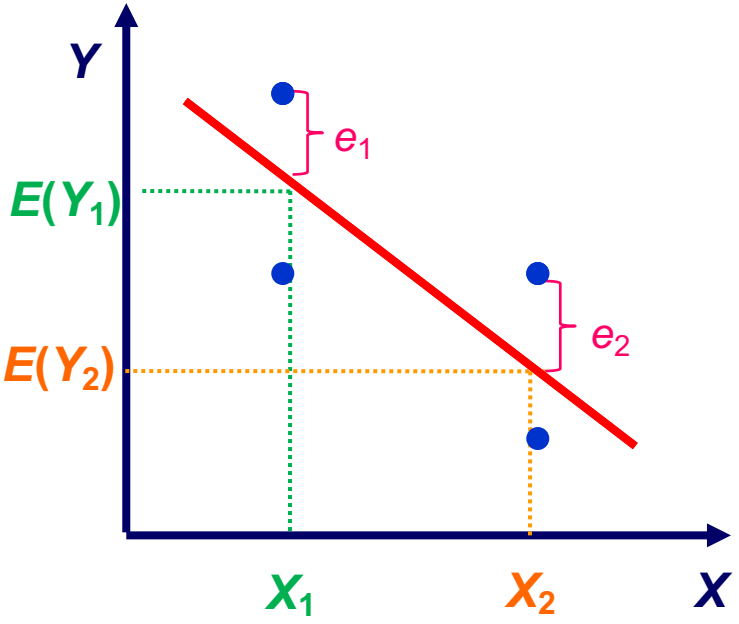
Não é um pressuposto necessário para que os estimadores de MQO sejam MELNV, mas necessário para que as inferências sejam válidas.

Origem do Problema

Caso os valores de *X* não sejam fixos, mas comportem-se como um v.a., esses não poderão estar relacionados aos erros *e* do modelo:

$$Cov(e_i, X_i) = 0 \quad \text{ou} \quad E(e_i X_i) = 0$$

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i$$



Controlando-se os valor de *X*, seria possível observar variações aleatórias de *Y* ou *e* (que representa a influência das variáveis omitidas).

Mas se, por exemplo, um efeito positivo de *e* sobre *Y* causar também efeito sobre *X*, a reta se deslocará para cima. Nessas condições, os estimadores de MQO serão tendenciosos e inconsistentes.

Função Demanda X Oferta

Pela teoria microeconômica temos que:

$$Q^d = \alpha_0 + \alpha_1 P + e^d$$

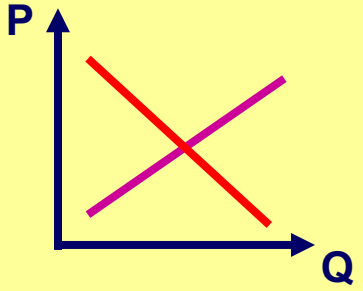
A função demanda relaciona o preço de uma mercadoria à quantidade demandada.

Sabemos, pela teoria microeconômica, que se o preço for muito baixo, muitos consumidores irão adquirir a mercadoria...

$$Q^o = \beta_0 + \beta_1 P + e^o$$

Já a função oferta relaciona o preço de uma mercadoria à quantidade ofertada.

Mas também sabemos, pela mesma teoria microeconômica, que se o preço for muito baixo, o produtor deixará de produzir, fazendo com que o preço da mercadoria aumente...



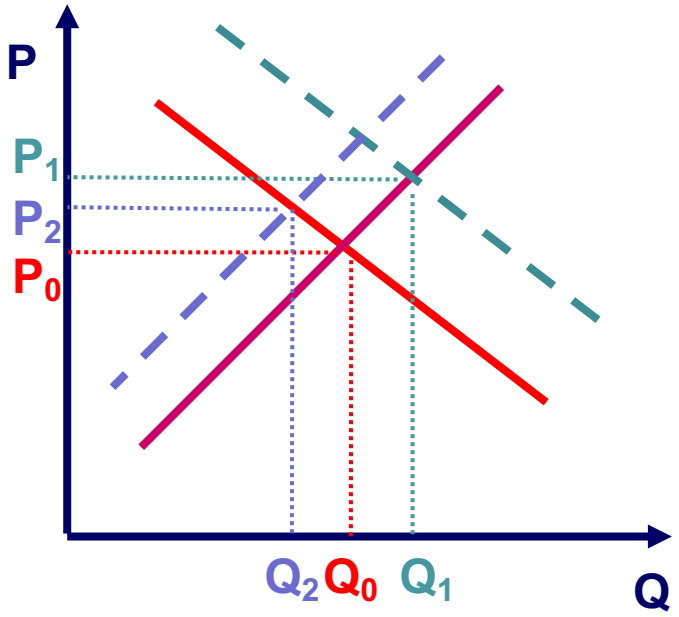
$$Q^d = \alpha_0 + \alpha_1 P + e^d$$
$$Q^o = \beta_0 + \beta_1 P + e^o$$
$$Q^d = Q^o$$

Preço e quantidade são determinados conjuntamente pelo equilíbrio entre as funções de demanda e oferta.

O preço de mercado será então determinado simultaneamente pela interação de produtores e consumidores em um mercado. O preço observado na economia pressupõe o equilíbrio entre as duas forças.

Simultaneidade Preço X Quantidade

$$Q^d = \alpha_0 + \alpha_1 P + e^d$$
$$Q^o = \beta_0 + \beta_1 P + e^o$$
$$Q^d = Q^o$$



Função demanda: se demanda aumentar de Q_0 para Q_1 em decorrência de uma variação de e^d (renda ou gosto, por exemplo), o preço também aumentará pois os produtores não estarão dispostos a aumentar a oferta sem variação do preço. A função de demanda deslocar–se-á para cima.

Função oferta: se a oferta ofertada reduzir de Q_0 para Q_2 devido a fatores e^o alheios ao preço (greve ou fatores ambientais, por exemplo), o preço também aumentará para ajustar-se à demanda. A função oferta deslocar-se-á para cima.

Variações de e^d afetarão tanto Q quanto P, assim como e^o também afetará ambas as variáveis. Em outras palavras, P e Q são conjuntamente dependentes e tanto e^d quanto e^o possuem correlação com P.

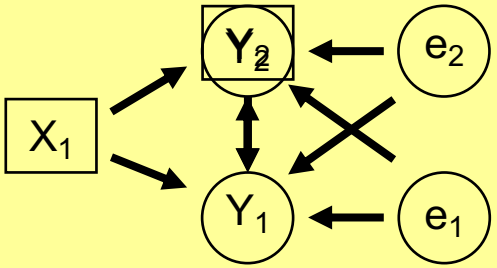
Equações Simultâneas - Definição

Sistema de Equações Simultâneas:

Seja o sistema de equações simultâneas:

$$Y_{1i} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2i} + \alpha_2 X_{1i} + e_{1i}$$

$$Y_{2i} = \beta_0 + \beta_1 Y_{1i} + \beta_2 X_{1i} + e_{2i}$$



Y_1 e Y_2 são mutuamente dependentes, ou ditas **variáveis endógenas**, determinadas dentro do sistema. X_1 e X_2 são **variáveis exógenas,** definidas fora do sistema.

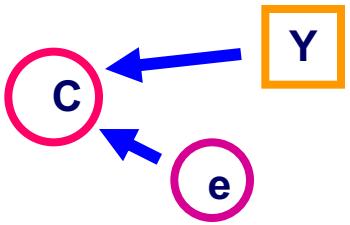
Conseqüencias da simultaneidade

Como há uma mútua relação entre as variáveis endógenas Y_1 e Y_2, os erros e_1 da primeira equação afetarão, simultanemente, Y_1 e Y_2. Analogamente, os erros e_2 da segunda equação afetarão simultaneamente Y_2 e Y_1. A existência de relação entre erros e_1 e regressor Y_2 na primeira equação, assim como a relação entre erros e_2 e regressor Y_1 na segunda equação, tornam os estimadores de MQO **viesados** e **inconsistentes**.

Equações Simultâneas - Exemplo

Um modelo simplificado de determinação da renda:

Função Consumo

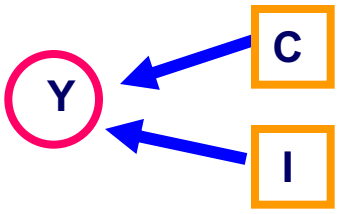


$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + e_t$$

O consumo depende de vários fatores mas, principalmente, da renda.

Nessa relação isolada, a renda (Y) seria considerada uma **variável exógena** que determinaria a **variável endógena** Consumo (C). Os erros e indicariam fatores alheios à renda que determinam o consumo.

Identidade da Renda

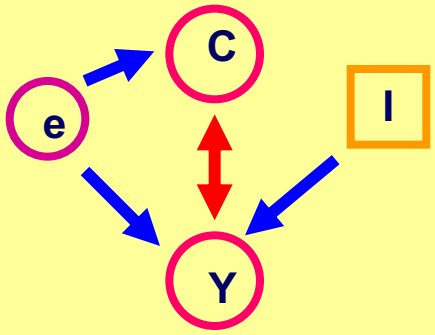


$$Y_t = C_t + I_t$$

Pressupondo uma economia fechada, pode-se, simplificadamente, supor que a renda nacional seja igual ao consumo mais investimento.

Não há erro aleatório pois não se trata de um modelo estatístico, mas sim de uma relação matemática determinística.

Função Consumo × Renda



$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + e_t$$
$$Y_t = C_t + I_t$$

O consumo depende da renda que, por sua vez, também depende do consumo.

Pela função consumo, variações no consumo (C_t) devido a fatores alheios à renda (e_t) também afetariam a renda (Y_t), até se chegar a um novo ponto de equilíbrio.

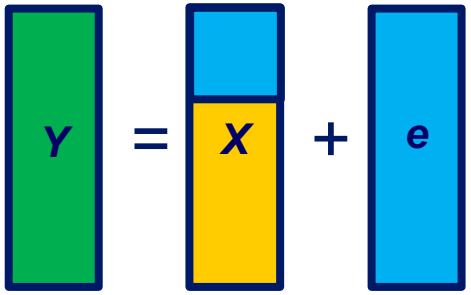
***C* e *Y* seriam variáveis endógenas, determinadas internamente no sistema. *I* seria a única variável exógena.**

Variáveis Instrumentais

Desejamos analisar: $Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i$

Mas temos: $\mathrm{Cov}(X_i, e_i) \neq 0$

Os estimadores de MQO serão viesados e inconsistentes

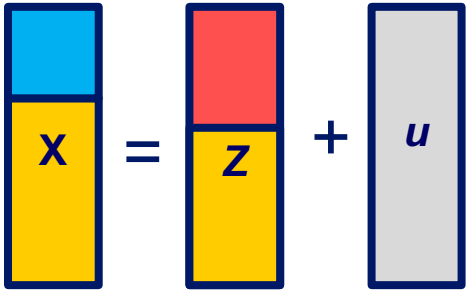


Desejamos encontrar um instrumento Z tal que:

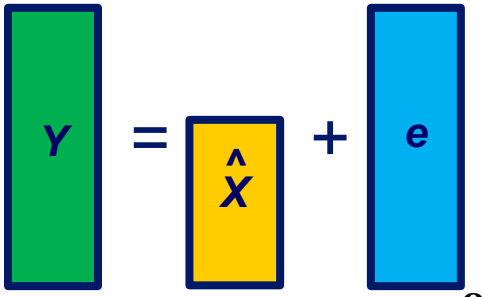
$\mathrm{Cov}(Z_i, e_i) = 0$ e $Cov(X_i, Z_i) \neq 0$

A parcela de Z associada a X será estimada por:

$$\hat{X}_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 Z_i$$



Um estimador consistente pode ser obtido por:

$$Y_i = \alpha + \beta \hat{X}_i + e_i$$

Embora consistente, o estimadore obtido com o uso de VI tende a ser viesado para amostras pequenas.